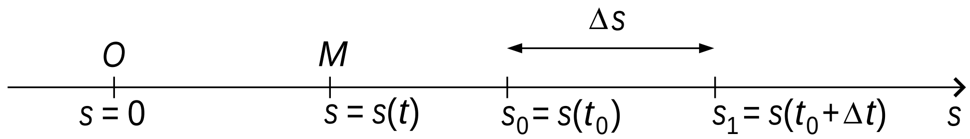
Aula 1

Velocidade instantânea e derivadas

1.1 Velocidade instantânea

Suponhamos que um ponto móvel M desloca-se ao longo de uma linha reta horizontal, a partir de um ponto O.



O deslocamento s, de M, em relação ao ponto O, é a distância de O a M, se M está à direita de O, e é o negativo dessa distância se M está à esquerda de O. Assim, s é positivo ou negativo, conforme M se encontre, respectivamente, à direita ou à esquerda de O.

Com estas convenções, a reta passa a ser *orientada*, e a chamamos de *eixo* s, sendo O sua origem.

O deslocamento s depende do instante de tempo t, ou seja, s é uma função da variável t:

$$s = s(t)$$

Em um determinado instante t_0, o deslocamento de M é $s_0 = s(t_0)$. Em um instante posterior t_1, o deslocamento de M é $s_1 = s(t_1)$.

A *velocidade média* do ponto M, no intervalo de tempo $[t_0, t_1]$ é dada por

$$v_m = \frac{s_1 - s_0}{t_1 - t_0} = \frac{s(t_1) - s(t_0)}{t_1 - t_0}$$

Podemos também escrever $t_1 = t_0 + \Delta t$, ou seja, $\Delta t = t_1 - t_0$, e também $\Delta s = s(t_1) - s(t_0) = s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)$.

Teremos então

$$\boxed{v_m = \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t} = \frac{\Delta s}{\Delta t}}$$

Por exemplo, vamos supor que $s(t) = \frac{1}{2}at^2$ (o ponto móvel é uniformemente acelerado). Assim, no instante $t = 0$ o ponto móvel está em $s(0) = \frac{1}{2}a \cdot 0^2 = 0$.

A partir de um certo instante t_0, temos uma variação de tempo Δt. Seja $t_1 = t_0 + \Delta t$. Podemos ter $\Delta t > 0$ ou $\Delta t < 0$ (quando $\Delta t < 0$, o instante t_1 antecede t_0). Teremos então

$$s(t_1) = s(t_0 + \Delta t) = \frac{1}{2}a(t_0 + \Delta t)^2 = \frac{1}{2} \cdot \left(at_0^2 + 2at_0 \cdot \Delta t + a(\Delta t)^2\right)$$

A variação do deslocamento do ponto móvel, nesse intervalo de tempo, será

$$\Delta s = s(t_1) - s(t_0) = \frac{1}{2}at_0^2 + at_0 \cdot \Delta t + \frac{1}{2}a(\Delta t)^2 - \frac{1}{2}at_0^2$$

ou seja,

$$\Delta s = at_0 \cdot \Delta t + \frac{a(\Delta t)^2}{2}$$

A velocidade média do ponto, no intervalo de tempo $[t_0, t_1]$, será dada por

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{at_0 \cdot \Delta t + \frac{a(\Delta t)^2}{2}}{\Delta t} = at_0 + \frac{a\Delta t}{2}$$

Se $\Delta t \approx 0$, então também teremos $\Delta s = at_0 \cdot \Delta t + \frac{a(\Delta t)^2}{2} \approx 0$. No entanto,

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = at_0 + \frac{a\Delta t}{2} \approx at_0$$

De um modo geral, definimos a *velocidade instantânea* $v(t_0)$, do ponto M, no instante t_0, como sendo o *limite* da velocidade média no intervalo de t_0 a $t_0 + \Delta t$, quando Δt *tende a zero* (esta foi uma ideia de Isaac Newton, um dos criadores do Cálculo Diferencial e Integral no século XVII), e escrevemos

$$v(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

No nosso exemplo,

$$v(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \left(at_0 + \frac{a\Delta t}{2}\right) = at_0$$

1.2 Derivada de uma função

Uma função f é uma lei que associa cada valor x de um certo conjunto A (o domínio de f), um único valor $f(x)$ de um certo conjunto B (o contra-domínio de f). Neste curso, teremos sempre $A \subset \mathbb{R}$ e $B \subset \mathbb{R}$. Veja também a observação 1.1, mais adiante nesta aula. Muitas vezes diremos "função $f(x)$", em lugar de "função f".

Dada uma função $f(x)$, a função derivada $f'(x)$ (leia-se "f *linha de* x") é a função definida quando consideramos, para cada x no domínio de $f(x)$[1], sujeito a uma variação $\Delta x \neq 0$, a variação correspondente de $y = f(x)$,

$$\Delta y = \Delta f = f(x + \Delta x) - f(x)$$

e então calculamos o valor limite da razão

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

quando Δx tende a 0, ou seja, quando Δx se aproxima indefinidamente de 0. Escrevemos então

$$\boxed{f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}}$$

Para um valor específico de x, digamos $x = x_0$,

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

é a derivada de f (ou de $f(x)$), no ponto x_0.

Como estabelecemos na seção anterior, para um ponto móvel M em movimento retilíneo sobre um eixo s, se $s(t)$ indica sua posição no instante t, então a velocidade instantânea de M no instante t é a derivada $s'(t)$.

Como primeiro e importante exemplo de cálculo de derivadas, temos

Regra 1.1. *Se* $f(x) = x^n$, n *inteiro positivo, então* $f'(x) = nx^{n-1}$.

Demonstração. Da álgebra elementar, temos as seguintes fórmulas de fatoração:

$$\begin{aligned}
b^2 - a^2 &= (b - a)(b + a) \\
b^3 - a^3 &= (b - a)(b^2 + ab + a^2) \\
b^4 - a^4 &= (b - a)(b^3 + ab^2 + a^2b + a^3)
\end{aligned}$$

[1] ou para cada x em um intervalo aberto contido em $D(f)$

que o leitor pode verificar, simplesmente efetuando os produtos à direita, e então simplificando. De um modo geral, para $n \geq 4$, vale a seguinte fórmula:

$$b^n - a^n = (b-a)(b^{n-1} + ab^{n-2} + a^2b^{n-3} + \cdots + a^{n-3}b^2 + a^{n-2}b + a^{n-1}) \tag{1.1}$$

Sendo $f(x) = x^n$, temos para $\Delta x \neq 0$,

$$\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x) = (x + \Delta x)^n - x^n \tag{1.2}$$

Substituindo $b = x + \Delta x$ e $a = x$, em 1.1, temos $b - a = \Delta x$, e então obtemos

$$\Delta f = \Delta x \cdot ((x + \Delta x)^{n-1} + x \cdot (x + \Delta x)^{n-2} + \cdots + x^{n-2}(x + \Delta x) + x^{n-1})$$

do que então

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = (x + \Delta x)^{n-1} + x \cdot (x + \Delta x)^{n-2} + \cdots + x^{n-2}(x + \Delta x) + x^{n-1}$$

Daí,

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} &= x^{n-1} + x \cdot x^{n-2} + \cdots + x^{n-2} \cdot x + x^{n-1} \\ &= \underbrace{x^{n-1} + x^{n-1} + \cdots + x^{n-1} + x^{n-1}}_{n \text{ parcelas}} = nx^{n-1} \end{aligned}$$

Portanto, $(x^n)' = nx^{n-1}$. □

1.2.1 Notações simbólicas para derivadas, habitualmente empregadas

Sendo $y = f(x)$, também escrevemos $\Delta y = \Delta f = f(x + \Delta x) - f(x)$, e denotamos

$$\frac{dy}{dx} = (\textit{derivada de } y \textit{ em relação a } x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Assim temos $\dfrac{dy}{dx} = f'(x)$. Indicamos ainda

$$f'(x_0) = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_0} = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0}$$

A razão

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

é a *taxa de variação média de* y*, em relação a* x*, no intervalo* $[x_0, x_0 + \Delta x]$ *(ou no intervalo* $[x_0 + \Delta x, x_0]$*, se* $\Delta x < 0$*).*

O valor

$$f'(x_0) = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

é chamado de *taxa de variação (instantânea) de* y *em relação a* x*, no ponto* $x = x_0$.

Outras notações frequentemente utilizadas para as derivadas (os símbolos abaixo tem o mesmo significado):

$f'(x)$ (notação de Lagrange)

$(f(x))'$

$\dfrac{df}{dx}$ (notação de Leibniz, leia-se *"dê* f *dê* x*"*)

$\dfrac{dy}{dx}$ (sendo $y = f(x)$)

$\dfrac{d}{dx}(f(x))$

$\dot{x}(t)$ (notação de Newton, derivada de x em relação à variável t (tempo))

Também tem o mesmo significado as seguintes notações para a derivada de f no ponto x_0:

$f'(x_0)$ $\qquad$ $(f(x))'_{|x=x_0}$ $\qquad$ $\dfrac{df}{dx}(x_0)$

$\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=x_0}$ $\qquad$ $\dfrac{d}{dx}(f(x))_{|x=x_0}$

Exemplo 1.1. *De acordo com a regra 1.1, temos*

$(x)' = (x^1)' = 1x^{1-1} = x^0 = 1$, *ou seja* $(x)' = 1$.

$(x^2)' = 2x^{2-1} = 2x$.

$(x^3)' = 3x^{3-1} = 3x^2$.

$(x^{100})' = 100x^{99}$.

Observação 1.1 (Intervalos da reta, e domínios das funções que estudaremos). *Aqui, e no restante do texto, estaremos assumindo sempre que nossas funções são funções de* *uma variável real* x, *com valores* $f(x)$ *reais, e estão definidas em intervalos ou reuniões de intervalos de* $\mathbb{R}$, *ou seja, tem os valores de* x *tomados em intervalos ou reuniões de intervalos.*

Sendo a *e* b *números reais, com* $a < b$, *chamam-se intervalos de* $\mathbb{R}$, *de extremos* a *e* b, *os conjuntos de uma das formas:*

$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ *(intervalo* fechado *de extremos* a *e* b*)*;

$]a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ *(intervalo* aberto *de extremos* a *e* b*)*;

$[a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$ *(intervalo de extremos* a *e* b, semi-aberto *em* b*)*;

$]a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$ *(intervalo de extremos* a *e* b, semi-aberto *em* a*)*.

Os intervalos acima são os intervalos limitados.

Os intervalos ilimitados *são conjuntos de uma das formas:*

$[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$ *(intervalo* fechado *de* a *a* $+\infty$*)*;

$]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$ *(intervalo* aberto *de* a *a* $+\infty$*)*;

$]-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}$ *(intervalo* fechado *de* $-\infty$ *a* b*)*;

$]-\infty, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$ *(intervalo* aberto *de* $-\infty$ *a* b*)*;

$]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$ *(intervalo* aberto *de* $-\infty$ *a* $+\infty$*)*;

sendo a *e* b *números reais.*

Como exemplo de funções reais de variável real, cujos domínios são intervalos ou reuniões de intervalos de $\mathbb{R}$, *temos as seguintes.*

1. $\boxed{f(x) = \sqrt{x}}$ *é uma função que está definida para os valores reais de* x *para os quais* $\sqrt{x}$ *existe e é um número real, ou seja, para* $x \geq 0$. *Assim, dizemos que o* domínio *ou* campo de definição *de* f *é o intervalo* $D(f) = [0, +\infty[$.

2. $\boxed{f(x) = 1/x}$ *é uma função que está definida para os valores reais de* x *para os quais* $1/x$ *existe e é um número real, ou seja, para* $x \neq 0$. *Assim, o* domínio *ou* campo de definição *de* f *é o conjunto* $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$, *ou seja, a reunião de intervalos* $]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$.

3. $\boxed{f(x) = \sqrt{2 - x} + \dfrac{1}{\sqrt{x - 1}}}$ *está definida para os valores reais de* x *para os quais* $\sqrt{2 - x}$ *e* $1/\sqrt{x - 1}$ *existem e são números reais, ou seja, para* $x \leq 2$ *(*$2 - x \geq 0$*) e* $x > 1$ *(*$x - 1 > 0$*). Assim, o* domínio *ou* campo de definição *de* f *é o intervalo* $D(f) =]1, 2]$.

Para um valor específico de x*, digamos* $x = x_0$*, no domínio de uma função* f*, ao calcularmos o limite*

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

estamos supondo que algum intervalo aberto, contendo x_0*, também é parte do domínio de* f*, de modo que* $x_0 + \Delta x$ *também estará no domínio de* f *quando* Δx *for não nulo e suficientemente pequeno.*

1.3 Primeiras regras de derivação (ou diferenciação)

Diferenciação ou *derivação* de uma função é o processo de cálculo da derivada da função.

Regra 1.2. *Se* $f(x)$ *é uma função tendo derivada* $f'(x)$ *e* c *é uma constante, então*

$$(cf(x))' = cf'(x).$$

Ou seja, a derivada de uma constante vezes uma função é a constante vezes a derivada da função.

Regra 1.3 (Derivada de uma soma de funções). *Sendo* $f(x)$ *e* $g(x)$ *duas funções tendo derivadas* $f'(x)$ *e* $g'(x)$*, respectivamente, temos*

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x).$$

Ou seja, a derivada de uma soma de duas funções é a soma das respectivas derivadas.

Demonstração das regras 1.2 e 1.3. Alguns fatos sobre limites são assumidos intuitivamente.

$$\begin{aligned}
(cf(x))' &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{cf(x + \Delta x) - cf(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} c \cdot \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\
&= c \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\
&= c \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = cf'(x)
\end{aligned}$$

Para deduzir a regra 1.3 escrevemos $h(x) = f(x) + g(x)$ e tomamos $\Delta x \neq 0$. Então

$$\begin{aligned}\Delta h &= h(x+\Delta x) - h(x)\\ &= (f(x+\Delta x) + g(x+\Delta x)) - (f(x) + g(x))\\ &= (f(x+\Delta x) - f(x)) + (g(x+\Delta x) - g(x))\\ &= \Delta f + \Delta g\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}[f(x) + g(x)]' &= h'(x)\\ &= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta h}{\Delta x}\\ &= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta f + \Delta g}{\Delta x}\\ &= \lim_{\Delta x\to 0} \left(\frac{\Delta f}{\Delta x} + \frac{\Delta g}{\Delta x}\right)\\ &= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} + \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta g}{\Delta x} = f'(x) + g'(x)\end{aligned}$$ □

Exemplo 1.2. *Sendo* $f(x) = 2x^3 - 3x^5$, *temos*

$$\begin{aligned}f'(x) &= (2x^3 - 3x^5)'\\ &= (2x^3 + (-3)x^5)'\\ &= (2x^3)' + ((-3)x^5)' && ((f+g)' = f' + g')\\ &= 2(x^3)' + (-3)(x^5)' && ((cf)' = cf')\\ &= 2\cdot 3x^2 + (-3)\cdot 5x^4 && ((x^n)' = nx^{n-1})\\ &= 6x^2 - 15x^4\end{aligned}$$

Observação 1.2. *Por um argumento tal como o usado no exemplo anterior, podemos facilmente deduzir a regra:* $(f(x) - g(x))' = f'(x) - g'(x)$.

Regra 1.4. *A derivada de uma função constante é* 0*: se* c *é uma constante real e* $f(x) = c$ *para cada* x *real, então* $f'(x) = (c)' = 0$.

Demonstração. Sendo $f(x) = c$ para cada x real, então

$\Delta f = f(x+\Delta x) - f(x) = c - c = 0.$

Portanto, sendo $\Delta x \neq 0$, $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \dfrac{0}{\Delta x} = 0$ ($\frac{\Delta f}{\Delta x}$ é igual a 0 mesmo antes de calcularmos o limite).

Logo $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} 0 = 0$.

Assim, se c é uma constante, $(c)' = 0$. □

Exemplo 1.3. *Sendo* $y = -3t^6 + 21t^2 - 98$, *calcular* $\frac{dy}{dt}$.

Aplicando as regras acima estabelecidas, indicando por $(\ )'$ *a derivada de* $(\ )$ *em relação a* t,

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt} &= (-3t^6 + 21t^2 - 98)' \\ &= -18t^5 + 42t\end{aligned}$$

Exemplo 1.4. *Sendo* $y = \frac{1}{x}$, *calcular* $\frac{dy}{dx}$.

Temos $y = \frac{1}{x}$, *e então tomando* $\Delta x \neq 0$,

$$\Delta y = \frac{1}{x+\Delta x} - \frac{1}{x} = \frac{x-(x+\Delta x)}{x(x+\Delta x)} = \frac{-\Delta x}{x(x+\Delta x)}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-1}{x(x+\Delta x)}$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{-1}{x(x+\Delta x)} = \frac{-1}{x\cdot x} = -\frac{1}{x^2}$$

1.4 Problemas

1. A posição de um ponto P sobre um eixo x, é dada por $x(t) = 4t^2 + 3t - 2$, com t medido em segundos e $x(t)$ em centímetros.

   (a) Determine as velocidades médias de P nos seguintes intervalos de tempo: $[1; 1,2]$, $[1; 1,1]$, $[1; 1,01]$, $[1; 1,001]$.

   (b) Determine a velocidade de P no instante $t = 1$ seg.

   (c) Determine os intervalos de tempo em que P se move no sentido positivo e aqueles em que P se move no sentido negativo (movimento retrógrado). (P se move no sentido positivo ou negativo se $x(t)$ aumenta ou diminui, respectivamente, à medida em que t aumenta.) Para resolver este problema, leve em conta que o gráfico de $x(t)$, em função de t, é uma parábola.

2. Se um objeto é lançado verticalmente para cima, com velocidade inicial 110 m/s, sua altura $h(t)$, acima do chão ($h = 0$), após t segundos, é dada (aproximadamente) por $h(t) = 110t - 5t^2$ metros. Quais são as velocidades do objeto nos instantes $t = 3\,s$ e $t = 4\,s$? Em que instante o objeto atinge sua altura máxima? (Leve em conta que o gráfico de $h(t)$ como função de t é uma parábola.) Em que instante atinge o chão? Com que velocidade atinge o chão?

3. Calcule $f'(x)$, para cada uma das funções $f(x)$ dadas abaixo, cumprindo as seguintes etapas

   i. Primeiro desenvolva a expressão $\Delta f = f(x+\Delta x) - f(x)$, fazendo as simplificações cabíveis.

   ii. Em seguida obtenha, uma expressão simplificada para $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$.

   iii. Finalmente, calcule o limite $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta x}$.

   (a) $f(x) = 17 - 6x$
   (b) $f(x) = 7x^2 - 5$
   (c) $f(x) = x^3 + 2x$
   (d) $f(x) = \sqrt{x}$
   (e) $f(x) = \dfrac{1}{x+5}$
   (f) $f(x) = x^5$
   (g) $f(x) = \dfrac{6}{x^2}$

4. Usando as regras de derivação estabelecidas, calcule as derivadas das seguintes funções.

   (a) $f(t) = -6t^3 + 12t^2 - 4t + 7$
   (b) $f(t) = (3t + 5)^2$ *Sugestão:* Primeiro desenvolva o quadrado.
   (c) $f(x) = (-2x^2 + 1)^3$ *Sugestão:* Primeiro desenvolva o cubo.
   (d) $f(x) = (3x^2 - 7x + 1)(x^2 + x - 1)$ *Sugestão:* Primeiro desenvolva o produto.
   (e) $f(x) = x^3 - x^2 + 15$

5. Determine o *domínio* de cada uma das seguintes funções. Represente-o como um intervalo ou uma reunião de intervalos de $\mathbb{R}$. No nosso contexto, o domínio de uma função f é o conjunto de todos os números reais x para os quais $f(x)$ é um número real.

   (a) $f(x) = x^3 - 5x + 3$

(b) $f(x) = -\sqrt{4-x}$

(c) $f(x) = -\sqrt{4-x^2}$

(d) $f(x) = \sqrt{x^2-5x+4}$

(e) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2x-x^2}}$

1.4.1 Respostas e sugestões

1. (a) $11,8$; $11,4$; $11,04$; $11,004$ (cm/s).
   (b) 11 cm/s.
   (c) P se move no sentido positivo quando $t > -3/8$, e no sentido negativo quando $t < -3/8$.

2. 80 m/s e 70 m/s. Em $t = 11$ s. Em $t = 22$ s, com a velocidade de -110 m/s.

3. (a)
   i. $\Delta f = -6\Delta x$
   ii. $\frac{\Delta f}{\Delta x} = -6$
   iii. $f'(x) = -6$

   (b)
   i. $\Delta f = 14x\Delta x + 7(\Delta x)^2$
   ii. $\frac{\Delta f}{\Delta x} = 14x + 7\Delta x$
   iii. $f'(x) = 14x$

   (c)
   i. $\Delta f = (3x^2+2)\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$
   ii. $\frac{\Delta f}{\Delta x} = 3x^2 + 2 + 3x(\Delta x) + (\Delta x)^2$
   iii. $f'(x) = 3x^2 + 2$

   (d)
   i. $\Delta f = \sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}$
   ii. $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x}$
   iii. $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

   Sugestão. Ao calcular o limite $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$, o leitor chegará à expressão $0/0$, que não tem significado matemático. Para contornar este problema, devemos "ajeitar" algebricamente a expressão $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ para que o termo Δx desapareça do denominador, através de simplificações, como as indicadas a seguir.

$$\begin{aligned}\frac{\Delta f}{\Delta x} &= \frac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x} = \frac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x}\cdot\frac{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}\\ &= \frac{(x+\Delta x)-x}{\Delta x\cdot(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})} = \frac{\cancel{\Delta x}}{\cancel{\Delta x}\cdot(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})} = \frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}\end{aligned}$$

   Aqui fizemos uso da identidade $(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b}) = a - b$.

   (e)
   i. $\Delta f = \frac{1}{x+\Delta x+5} - \frac{1}{x+5} = \frac{-\Delta x}{(x+\Delta x+5)(x+5)}$
   ii. $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{-1}{(x+\Delta x+5)(x+5)}$

iii. $f'(x) = -\frac{1}{(x+5)^2}$

(f) $f'(x) = 5x^4$

(g) $f'(x) = -\dfrac{12}{x^3}$

4. (a) $f'(t) = -18t^2 + 24t - 4$

(b) $f'(t) = 18t + 30$

(c) $f'(x) = -48x^5 + 48x^3 - 12x$

(d) $f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 18x + 8$

(e) $f'(x) = 3x^2 - 2x$

5. (a) $\mathbb{R}$

(b) $]-\infty, 4]$

(c) $[-2, 2]$

(d) $]-\infty, 1] \cup [4, +\infty[$

(e) $]0, 2[$